Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Tunis
Ecole Normale Supérieure

Session 2010
du
Concours d'Entrée à l'Ecole Normale Supérieure
Filière PC

Epreuve de mathématiques

Durée: 4 heures

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est strictement interdit

---

Le sujet suivant comporte deux problèmes entièrement indépendants qui doivent être traités dans deux copies séparées.

Premier Problème

L'objectif de ce problème est d'étudier la nature de certaines séries numériques dont les termes généraux respectifs sont les restes de séries alternées. Comme à l'accoutumé, on note $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. L'ensemble des nombres réels strictement positifs est noté $\mathbb{R}_+^*$ ou $]0,+\infty[$ et celui des entiers naturels non nuls est noté $\mathbb{N}^*$.

Le problème contient deux parties qui sont, dans une large mesure, indépendantes. De ce fait, ces deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre. Toutefois, pour répondre à la dernière question de la deuxième partie, on aura besoin d'une définition donnée dans la première.

Premiére partie

Pour tout $(x,n,p) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on définit la fonction $G_{x,n,p} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$G_{x,n,p}(t) = \frac{t^{x-1}e^{-nt}}{(1+e^{-t})^p}, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+^*.$$

1.1. Montrer que si $(x,n,p) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ alors $G_{x,n,p}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On peut donc définir une fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} G_{x,1,0}(t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1.2. Vérifier que $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1.3. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir l'égalité $\dfrac{1}{n^x} = \dfrac{1}{\Gamma(x)} \displaystyle\int_0^{+\infty} G_{x,n,2}(t)\,\mathrm{d}t$.

1.4. On se donne $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier la convergence de la série de terme général $(-1)^n / n^x$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Ceci permet en particulier de définir une suite $(r_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^x}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

1.5. Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $r_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(x)} \displaystyle\int_0^{+\infty} G_{x,n+1,1}(t)\,\mathrm{d}t$.

1.6. En déduire, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la convergence de la série de terme général $r_n(x)$, où $n \in \mathbb{N}$, et l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_n(x) = \frac{-1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} G_{x,1,2}(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.7. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n(1)$.

Deuxième partie

On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ convexe, décroissante et de limite nulle en $+\infty$. On rappelle ici que f est dite *convexe* si

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y), \quad \text{pour tous } t \in [0,1] \text{ et } x, y \in \mathbb{R}_+^*.$$

2.1. Etablir la convergence de la série de terme général $(-1)^n f(n)$.

On peut ainsi définir une suite $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$R_n(f) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k f(k), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

2.2. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ alors

$$2R_n(f) - (-1)^{n+1} f(n+1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left(f(k) - f(k+1)\right).$$

2.3. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $f(n+1) \leq \dfrac{1}{2}\left(f(n+2) + f(n)\right)$ et en déduire que la suite $(f(n) - f(n+1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

2.4. En déduire que $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left(f(k) - f(k+1)\right)\right| \leq f(n+1) - f(n+2)$.

2.5. Montrer alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} R_n(f)$ est convergente.

2.6. Peut-on retrouver, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la nature de la série de terme général $r_n(x)$, où $n \in \mathbb{N}$ (voir $(*)$ ci-dessus pour la définition de $r_n(x)$)?

Deuxième Problème

Dans ce problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ celui des entiers naturels non nuls. Le corps des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$ et l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ est notée $\mathbb{C}[X]$.

Dans la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$. On rappelle que si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors λ est dite *valeur propre* de A si la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, où I_n désigne la matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. L'espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne sur $\mathbb{C}$ est noté $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Ainsi, $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ si, et seulement si, il existe une matrice $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AX = \lambda X$. La transposée d'une matrice A dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (ou dans $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) est notée ${}^tA$.

Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On note $A^0 = I_n$ et $A^k = A \cdots A$ (k fois) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. De plus, pour $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m \in \mathbb{C}[X]$, on pose

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_m A^m \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

On note que si P est le polynôme nul alors $P(A)$ est la matrice nulle et que si $P, Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ alors $(PQ)(A) = P(A)\,Q(A)$ (on ne demande pas à le vérifier). On rappelle enfin que si λ est une valeur propre de A alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$.

A/ Polynômes annulateurs d'une matrice

Soit A une matrice $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On pose

$$\mathrm{J}(A) = \{P \in \mathbb{C}[X] : P(A) = 0\}.$$

On remarque que $\mathrm{J}(A)$ contient le polynôme nul.

1. On se propose de montrer, dans cette question, que $\mathrm{J}(A)$ contient (au moins) un polynôme non nul.

   1.1. Quelle est la dimension de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}$?

   1.2. En déduire que la famille $\left(I_n, A, \ldots, A^{n^2}\right)$ est liée dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

   1.3. Conclure.

2. L'objectif de cette question est d'introduire le polynôme minimal de A. A cet effet, on pose

   $$\mathrm{D}(A) = \{\deg(P) : P \in \mathrm{J}(A) \text{ et } P \neq 0\}.$$

   2.1. Montrer que $\mathrm{D}(A)$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ et en déduire qu'il existe $m_A \in \mathrm{D}(A)$ tel que $k \geq m_A$, pour tout $k \in \mathrm{D}(A)$.

   2.2. Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathrm{J}(A)$ alors $aP \in \mathrm{J}(A)$.

   2.3. En déduire qu'il existe un polynôme unitaire $\pi_A \in \mathrm{J}(A)$ tel que $\deg(\pi_A) = m_A$. On dit que π_A est le *polynôme minimal* de A.

3. On note $\pi_A\mathbb{C}[X] = \{\pi_A Q : Q \in \mathbb{C}[X]\}$ (autrement dit, $\pi_A\mathbb{C}[X]$ est l'ensemble des multiples de π_A dans $\mathbb{C}[X]$). Cette question a pour but de montrer que $\pi_A\mathbb{C}[X] = \mathrm{J}(A)$.

   3.1. Etablir l'inclusion $\pi_A\mathbb{C}[X] \subset \mathrm{J}(A)$.

   On se donne $P \in \mathrm{J}(A)$.

3.2. Justifier brièvement l'existence de $Q, R \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P = \pi_A Q + R$ et $\deg(R) < m_A$.

3.3. Calculer $R(A)$.

3.4. En déduire que $P = \pi_A Q$ et conclure.

4. On fixe $\lambda \in \mathbb{C}$ et on se propose de montrer que λ est valeur propre de A si, et seulement si, $\pi_A(\lambda) = 0$.

4.1. Montrer que si λ est valeur propre de A alors $\pi_A(\lambda) = 0$.

Dans la suite, on suppose que $\pi_A(\lambda) = 0$. Il existe alors $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\pi_A(X) = (X - \lambda) Q(X).$$

4.2. Montrer que $(A - \lambda I_n) Q(A) = 0$.

4.3. Que peut-on dire de $Q(A)$ si $A - \lambda I$ est inversible?

4.4. En déduire que λ est valeur propre de A.

B/ Une application

Soient A, B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On définit $L : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$L(M) = AM - MB, \qquad \text{pour tout } M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

5. Vérifier que L est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

On rappelle que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une *valeur propre* de L s'il existe une matrice non nulle $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $L(M) = \lambda M$. Dans ce cas, M est appelée *vecteur propre* de L associé à la valeur propre λ.

6. Le but de cette question est de montrer que si α est une valeur propre de A et β est une valeur propre de B alors $\alpha - \beta$ est une valeur propre de L.

6.1. Justifier l'existence de $X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulles telles que $AX = \alpha X$ et ${}^tBY = \beta Y$.

6.2. Calculer $L(X\,{}^tY)$.

6.3. Conclure.

7. L'objectif de cette question est d'établir la réciproque de la question précédente. Soient alors une valeur propre λ de L et M un vecteur propre de L associé à λ.

7.1. Montrer, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que $A^k M = M(\lambda I_n + B)^k$.

7.2. En déduire que $P(A) M = M P(\lambda I_n + B)$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

7.3. Calculer $M \pi_A(\lambda I_n + B)$.

Dans la suite de la question, on pose $\pi_A(X) = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_{m_A})$ avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_A} \in \mathbb{C}$.

7.4. Calculer $M(B - (\alpha_1 - \lambda) I_n) \cdots (B - (\alpha_{m_A} - \lambda) I_n)$.

7.5. En déduire qu'il existe $k \in \{1, \ldots, m_A\}$ tel que $B - (\alpha_k - \lambda) I_n$ est non inversible.

7.6. Conclure qu'il existe une valeur propre α de A et une valeur propre β de B telles que $\lambda = \alpha - \beta$.

Fin de l'épreuve

Les nouveaux célibataires

En France, aujourd'hui, 9 millions d'individus vivent seuls. Une personne sur trois - à l'âge où les autres sont à deux - est en tête-à-tête avec elle-même. Mais observer ces solitaires comme une population à part, comme un noyau d'irréductibles construisant vaille que vaille, en parallèle des couples, une alternative définitive au bonheur à deux serait une erreur de lecture. Au jeu des chaises musicales de l'amour, celui qui reste en rade* n'est jamais le même à chaque tour. La figure du vieux garçon ou de l'éternelle incasable n'existe plus : la proportion d'individus restant célibataires à vie est devenue marginale. Mais la solitude, statistiquement, concerne de plus en plus de gens à un moment ou à un autre de leur existence. [...]

« Dans les années 60, il n'y a encore qu'un modèle d'union possible : un mariage pour la vie, c'est assez simple, explique le sociologue Louis Roussel. Puis le divorce, qui à partir de 1975 peut être prononcé par consentement mutuel, augmente de 10 à 40 % en quelques années, l'union libre s'impose, la fécondité est maîtrisée, les femmes se mettent à travailler et acquièrent leur indépendance financière. Ces changements sont extrêmement rapides. Et toutes les nouvelles pièces de ce puzzle assemblées donnent la réalité que nous mesurons aujourd'hui : l'union de deux personnes ne relève plus de la sphère publique, mais de l'ordre strictement privé. Voilà la révolution : que ce soit au sein du mariage ou de l'union libre, c'est au couple de définir sa propre loi. » [...]

Tiraillé entre le rêve d'un destin commun et l'exigence de l'épanouissement individuel, ployant sous le poids des espoirs que chacun met en lui tout en ayant la liberté d'y mettre fin, le couple implose littéralement, se brise et se recompose à l'infini. [...] Et les 9 millions de « solos » que l'on chiffre aujourd'hui, qu'ils soient divorcés, séparés ou célibataires, ne sont finalement que les acteurs, à un moment donné, de l'un des épisodes de cette histoire morcelée : le temps de la solitude.

Mais si les moeurs ont évolué dans les faits à toute allure, notre société judéo-chrétienne est encore travaillée par la nostalgie de ses vieux modèles. [...] Le couple ne dure plus. Mais il continue à être un modèle, un signe extérieur de réussite, d'épanouissement. Et pour ceux qui passent par la case solitude, ce décalage social est aussi un hiatus* intime : on se défie du couple, on s'en libère, mais on en rêve tout de même. [...]

Comment expliquer autrement le succès phénoménal de ces nouveaux modes de rencontres venus d'outre-Atlantique, les séances de "speed-datings"* ou de "blind-dates"* qui fleurissent un peu partout dans nos villes ? Comment analyser le nombre grandissant de clubs de solos, de foires de célibataires, de sites de rencontres [...] Que dire encore de ces séances très tendance* de rencontres à l'américaine où des stakhanovistes* du rendez-vous amoureux enchaînent en quelques heures quinze entretiens avec l'autre sexe ? « Les gens se mettent à chercher l'amour comme ils chercheraient un emploi, explique Georges Alcaraz. Sans doute est-ce un signe d'angoisse, mais ils ont à l'esprit un tas d'idées préconçues sur ce que doit être un couple ou une histoire d'amour. [...]

Au carrefour de la solitude, les 9 millions de futurs amants sont à cran*. Ils ont troqué leurs sueurs froides sentimentales contre un bilan chez un professionnel, ils ont fait le compte de leurs erreurs passées, calculé leur pourcentage de réussite à venir, mesuré leur indice de séduction et mis de l'ordre dans leurs fantasmes. Ils sont « prêts » à rencontrer l'autre. On leur murmurerait bien que des siècles de mythologie amoureuse les contemplent et les contredisent, et que si Yseult* s'était dite «prête» à rencontrer Tristan*, les deux amants maudits se seraient sans doute croisés sans se voir. Mais on leur dira plutôt que la roue tourne et qu'ils ont toutes les chances de se remettre un jour ou l'autre à l'apprentissage périlleux du couple. Les chiffres le disent. Et ça, ce n'est pas de la littérature.

Violaine de Montclos, *Le Point*, 16 mai 2004

* *en rade : exclu*
* *speed-datings : soirées de rendez-vous minutés et successifs avec des inconnus*
* *blind-dates : rendez-vous avec un inconnu*
* *tendance : à la mode*
* *stakhanovistes : travailleurs forcenés*
* *hiatus : décalage*
* *à cran : extrêmement tendu*
* *Tristan et Yseult : couple d'amoureux de la littérature médiévale*

Questions

Sauf indication contraire, vous répondrez à chacune des questions *avec vos propres mots*, sans recopier le texte original

1. L'auteur de ce texte cherche à : (1 point)

- ☐ *critiquer une évolution sociale.*
- ☐ *analyser un phénomène de société.*
- ☐ *alerter l'opinion sur un problème social.*

2. Quelle était la norme du couple jusqu'aux années soixante, selon le sociologue L. Roussel ? (1 point)

.....

.....

.....

3. Citez trois des changements qui ont causé la révolution de la vie de couple. (3 points)

.....

.....

.....

.....

4. Pourquoi, d'après le texte, le couple actuel n'est pas un couple stable ? (1 point)

.....

.....

.....

.....

5. Quelle est l'attitude des personnes seules par rapport au couple ? (2 points)

.....

6. *Pourquoi les nouveaux modes de rencontre venus de l'étranger suscitent la méfiance des célibataires.* (3 points)

7. *Dans le paragraphe final, que pense la journaliste des mesures employées par les chercheurs de couple ?* (3 points)

Langue :

1. Complétez le tableau suivant : (1,5point)

adjectifs	Noms
Tiraillé	
Périlleux	
solitaires	

2. **Remplacez les mots soulignés par « bien que » et réécrivez la phrase en opérant les transformations nécessaires (2points)**

Mais si les mœurs ont évolué, notre société judéo-chrétienne est encore travaillée par la nostalgie de ses vieux modèles

.....

.....

[...] Le couple ne dure plus. Mais il apparait comme un modèle,

.....

.....

3. **« Les gens se mettent à chercher l'amour comme ils chercheraient un emploi, explique Georges Alcaraz. Sans doute est-ce un signe d'angoisse, mais ils ont à l'esprit un tas d'idées préconçues sur ce que doit être un couple ou une histoire d'amour. [...] »**

Réécrivez la phrase en commençant comme suit et opérez les modifications nécessaires (2,5points)

Georges Alcaraz expliquait

.....

.....

.....

.....

.....

Essai :

En France, les célibataires sont de plus en plus nombreux à faire appel aux clubs, aux sites Internet et aux nouveaux modes de rencontre. Que pensez-vous de cette manière de chercher le/la partenaire idéal(e) ? Présentez votre point de vue de façon argumentée *(200 mots environ)*

.....

.....

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Juillet 2010

CONCOURS NATIONAL
D'ADMISSION A L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE

DISCIPLINE : SCIENCES FONDAMENTALES — SPECIALITE: PHYSIQUE-CHIMIE
EPREUVE DE CHIMIE — DUREE : 4 Heures — COEFFICIENT : 4

Les parties A et B sont à rédiger sur deux copies séparées.

PARTIE A (40 points)

EXERCICE I Activité optique et pouvoir rotatoire

I-a) Représenter dans l'espace l'acide 2-aminopropanoïque de configuration S. Le pouvoir rotatoire spécifique de cet énantiomère S est $[\alpha]^{25°C} = +8,4°$.

I-b) Le pouvoir rotatoire spécifique observé pour un échantillon de cet acide est de +2,1°. Quelle est la pureté optique de cet échantillon et quelle est sa composition ?

EXERCICE II Hybridation et mésomérie

II-a) Indiquer l'état d'hybridation des atomes de carbone et d'azote dans la molécule de benzonitrile: C_6H_5-C≡N.

II-b) Donner une représentation spatiale de cette molécule et préciser la valeur de l'angle CCN.

II-c) S'agit-il d'une molécule conjuguée? Si oui quel est le nombre d'atomes concernés par la conjugaison et quel est le nombre d'électrons délocalisables.

II-d) Écrire la forme limite polaire du benzonitrile où l'éloignement des charges est maximum.

EXERCICE III Stéréochimie et réactivité

III-a) Préciser la configuration du 1-phényl-1,2-époxyéthane noté **P** :



III-b) L'hydrolyse basique (NaOH / H_2O) de **P** ouvre le pont époxydique pour conduire à un diol **Q** de pouvoir rotatoire non nul. Détailler le mécanisme de cette réaction et donner la structure de Q en précisant sa stéréochimie.

III-c) Expliquer pourquoi l'hydrolyse en milieu acide protonique de **P**, conduit au diol Q de *pouvoir rotatoire nul*.

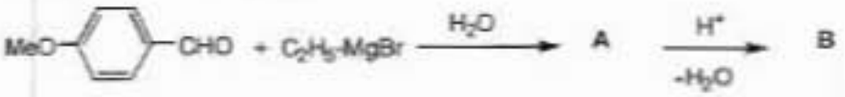
III-d) Que donne le chauffage de l'un des énantiomères de **Q** en milieu acide sulfurique ?

III-e) Écrire la structure du produit **R**, obtenu par action de CH_3MgBr suivie d'une hydrolyse sur **P**.

III-f) Proposer une autre méthode de synthèse de **R**, en procédant par une réaction de substitution électrophile sur le benzène utilisant comme réactif un chlorure d'acide.

PROBLEME *Synthèse organique*

L'anéthole **B** ($C_{10}H_{12}O$) de configuration *Z* est un des constituants de l'essence d'anis aux nombreuses applications : parfumerie, usages médicaux, etc....Il est obtenu à partir du *p*-méthoxybenzaldéhyde selon la séquence :

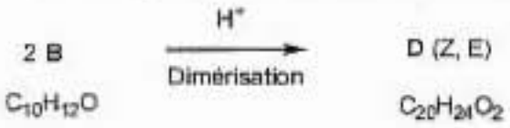


IV-a) Donner le nom de **A** et le nombre de stéréoisomères sous lesquels il est obtenu.

IV-b) Détailler le mécanisme d'obtention de **B** à partir de **A**.

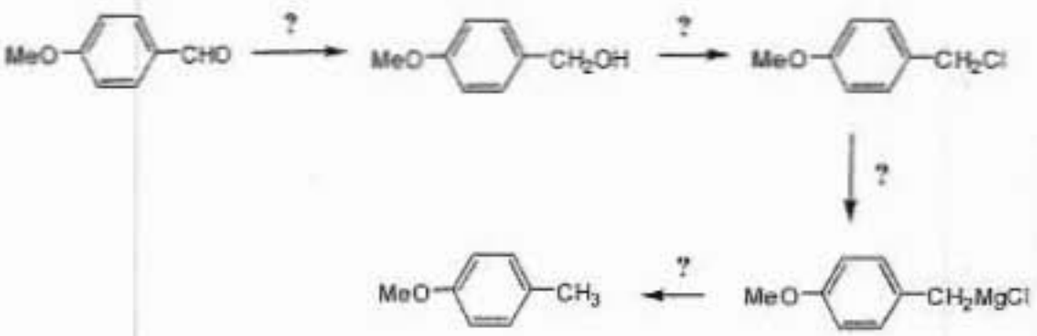
IV-c) Sachant que **B** peut être souillé de petites quantités de son stéréoisomère **C**, donner alors sa structure et préciser sa géométrie.

IV-d) L'anéthole **B** se dimérise facilement par chauffage en milieu acide pour conduire à l'isoanéthole **D** de configuration *Z* et *E*. En faisant appel à la stabilité du carbocation intermédiaire, expliquer la formation du dimère **D** et représenter les deux stéréoisomères *Z* et *E*.



IV-e) Donner la structure de la cétone **E** obtenue conjointement avec le *p*-méthoxybenzaldéhyde lors de l'ozonolyse en milieu réducteur de **D**.

IV-f) A partir du *p*-méthoxybenzaldéhyde, on réalise la suite réactionnelle ci-dessous. Sans détailler les mécanismes des différentes réactions, donner les réactifs utiles pour chaque étape en précisant les conditions opératoires :



PARTIE B (40 points)

EXERCICE I

On considère les éléments suivants : $_6C$, $_8O$, $_{14}Si$ et $_{50}Sn$.

1) Ecrire la structure électronique de chacun de ces éléments à l'état fondamental.

2) Quels sont les éléments qui appartiennent à la même période et ceux qui appartiennent au même groupe.

3) Classer tous les éléments par ordre d'électronégativité croissante – Justifier votre réponse

4) Donner le schéma de Lewis de la molécule de diméthyl éther $(CH_3)_2O$

EXERCICE II

Le phosgène $COCl_{2(g)}$ placé à l'état pur dans une enceinte à volume constant et porté à la température de 673K, se dissocie sous la pression P selon la réaction d'équation suivante :

$$COCl_2(g) \rightleftharpoons CO(g) + Cl_2(g)$$

dans la proportion de 20%.

1) Exprimer la constante d'équilibre Kp de cette réaction en fonction de P et du coefficient de dissociation α de $COCl_2$

2) Calculer la valeur α.

Dans l'enceinte précédente préalablement vidée, on mélange à 673K et en présence d'un catalyseur approprié, 1 mole de Cl_2 gaz , 2 moles de CO gaz et 2 moles de CO_2 gaz qui se comporte comme un gaz **inerte**. L'équilibre suivant est atteint :

$$CO(g) + Cl_2(g) \rightleftharpoons COCl_2(g)$$

3) Donner la composition finale de cet équilibre à 673K (présenter les résultats en proportions volumiques)

4) Calculer K'p à 673K et en déduire la valeur de $\Delta_rG°_{673K}$ sachant que P= 1 atm.

EXERCICE III :

L'oxyde de fer **FeO** a une maille cubique :

1) Quelle est la structure de cet oxyde ?

2) Déterminer les positions des ions Fe^{2+} et O^{2-} dans la maille.

3) Calculer l'arête de cet oxyde et en déduire sa masse volumique.

4) En réalité cet oxyde présente un défaut de fer par rapport à la formule **FeO**. Calculer sa masse volumique sachant qu'il contient 76.27% en masse de fer.

On donne

$O : 16\ g.mol^{-1}$; $Fe : 55.85\ g.mol^{-1}$; $N : 6.023\ 10^{23}$; $r(O^{2-}) = 1.410^{-10} m$; $r(Fe^{2+}) = 0.7610^{-10} m$

EXERCICE IV:

On donne pour les réactions suivantes, les enthalpies libres standard à 300K et à 1300K en $kJ.mol^{-1}$.

Réactions		300K	1300K
(1) $4Cu(s) + O_2(g) = 2Cu_2O(s)$	$\Delta_rG°_1$	-300	-160
(2) $2Cu(s) + O_2(g) = 2CuO(s)$	$\Delta_rG°_2$	-260	-80

1) Construire le diagramme d'Ellingham du cuivre entre 0 et 1500K.

2) L'oxyde du cuivre Cu_2O est-il stable dans toutes températures ?

3) Que se passe-t-il si du cuivre est soumis à un courant d'air atmosphérique pour lequel la pression en dioxygène $p(O_2)$ soit égale à 0.2 bar à 800K.

4) A quelle température un courant d'air à pression atmosphérique ne peut plus oxyder le cuivre en oxyde de cuivre (II) ?

EXERCICE V:

Le trioxyde de soufre, dissous dans l'acide sulfurique concentré, donne des oléums utilisés en chimie organique. En étudiant la cristallisation du système binaire H_2SO_4-SO_3, on note l'existence d'un composé défini et deux points eutectiques E1 et E2 :

Le point **E1** est obtenu à -10°C et contient 18.5% en masse de trioxyde de soufre.

Le point **E2** est obtenu à 0.7°C et contient 60 % en masse de trioxyde de soufre.

Le composé défini (noté **c.d**) correspond à un mélange contenant 45% en masse de trioxyde de soufre.

1) Donner la formule du composé défini.
2) Donner l'allure du diagramme binaire de cristallisation du système H_2SO_4-SO_3.

Un mélange contenant 60 % en masse de SO_3 est mis en contact avec de l'air humide. Le mélange va absorber de l'eau qui va réagir avec SO_3 pour donner H_2SO_4.

3) Expliquer l'évolution du point représentatif de ce mélange lorsque sa composition passe de 60% à 18.5% en masse de trioxyde de soufre à une température constante t=20°C.
4) Pour des compositions de 10, 45 et 80 % en masse de SO_3, décrire l'évolution du mélange lors d'un refroidissement isobare en précisant : t_1 et t_2 (températures d'apparition du premier et du deuxième solide) , la nature de ces solides et t_3 (température de disparition de la dernière goutte du liquide).

On donne :

$t_{f\,H2SO4} = 10,4°C$ $\quad$ $t_{f\,SO3} = 18.0°C$ $\quad$ $t_{f\,compose\,défini} = 36.0°C$

Ecole Normale Supérieure de Tunis	**Epreuve : Anglais**
Année Universitaire 2009-2010	**Durée : 2 H**
Concours d'entrée à l'Ecole Normale	**Module : Langue**
Juillet 2010	**Sections : Math-Physique / Physique-Chimie**

Earth-Like Planets May Be Shielded From Solar Scorching



Danger zone? The nearby M dwarf star Gliese 581 and some of its planets. A new study indicates that suns like this may not be as detrimental to habitable worlds as thought.

1. Many of our galaxy's suns have destroyed the atmospheres of orbiting Earth-like planets—or so astrobiologists have long feared. The Milky Way, they note, is dominated by M dwarf stars (also known as red dwarfs): violent, unpredictable suns that frequently hurl high-energy particles and **solar flares** into space. Because they are much cooler than our sun, any potentially habitable planet would need to orbit them much closer than Earth does, immediately putting it in the danger zone. But a new study indicates that these planets may be unexpectedly shielded from solar activity, keeping life safe.

2. M dwarfs make up at least 70% of the Milky Way's stars. Their masses range from roughly half to one-twentieth the mass of our sun, but what M dwarfs lack in size, they more than make up for in longevity. Astronomers estimate that these stars can burn for 40 billion to 100 billion years, giving any habitable planets plenty of time to evolve life. (The life span of our own sun, a G-class star, is about 10 billion years.) But during at least the first few billion years of their lives, M dwarfs also sport huge magnetic fields that routinely interact with their atmospheres to create coronal mass ejections—enormous explosions of matter from the star's highly ionized **corona**—and proton-rich flares.

3. To find out if this solar barbecue would **sear** any nearby habitable worlds, researchers led by astrobiologist Antigona Segura of the *Universidad Nacional Autónoma* de México (UNAM) in Mexico City simulated how a 1985 flare from AD Leonis (AD Leo), a young (less than 300 million years) and therefore very active M dwarf 16 light-years from Earth, would have affected a hypothetical Earth-like planet orbiting 0.16 astronomical units from the star. That's less than half Mercury's distance around the sun.

4. The **simulation**, to be reported in an upcoming issue of *Astrobiology*, indicates that when UV radiation from the star's upper atmosphere encountered the Earth-like atmosphere of our model planet, the energy resulted in a thicker ozone layer in the planetary atmosphere, providing a natural **shield** for the planetary surface. That's because the UV radiation actually split molecules of oxygen to create more ozone than it destroyed. "Throughout most of the flare, the surface of our model Earth-like planet experienced no more radiation than is typical on a sunny day here on Earth," astronomer Lucianne Walkowicz says.

5. The findings are especially good news, says Segura, because the star's 1985 flare was 1000 times as energetic as a similar flare on our own sun. So the fact that the model planet's atmosphere survived such a violent event may bode well for planets around similar young M dwarfs, she says. Mark Giampapa, an astronomer at the National Optical Astronomy Observatory in Tucson, Arizona, notes that most M dwarf stars are cooler than AD Leo is. Earth-like planets would have to orbit even closer to such stars and would thus suffer from stronger flare activity than the hypothetical planet in this study. In that case, he says, the planetary atmosphere may not go so **unscathed**.

Bruce Dorminey, *Science Magazine*, June 2010.

Clear handwriting and clean presentation of your paper are required.

Answer the questions in the provided spaces. Do not write your name on the answers sheet. Write your name on the en- tête sheet only. Return the filled exam sheet inside the en-tête sheet.

I. COMPREHENSION QUESTIONS (10 POINTS)

A/ Say whether the following statements are true or false. Justify your answer. (4.5 points)

1. The new research shows that planets susceptible of harbouring life are unsurprisingly vulnerable to solar activity.

.....

.....

2. According to astronomers, a star's longevity estimated to 40 billion years or more cannot allow reasonable time for life on orbiting earth-like planets to develop.

.....

.....

3. Astronomer Mark Giampapa thinks that the simulation to be reported in *Astrobiology* will undermine all previously stated dangers to which earth-like planets are said to be exposed.

.....

.....

B/ Rewrite using your own words the 2 underlined sentences in paragraph 2 in a way that conveys exactly the same meaning and length. (2 points)

.....

.....

C / Match words from the text in Column A with the corresponding definitions in Column B. There are 2 extra irrelevant definitions. (3.5 points)

Column A	Column B	Answers
1. scorching (title)	a. wholly unharmed	1. → .....
2. solar flare (P 1)	b. the imitative representation of the functioning of one system or process by means of the functioning of another	2. → .....
3. corona (P 2)	c. a protective structure or screen	3. → .....
4. scar (P 3)	d. a low-mass main sequence star	4. → .....
5. simulation (P 4)	e. the thin outermost part of the atmosphere of a star (as the sun)	5. → .....
6. shield (P 4)	f. to burn at a sudden contact with intense heat	6. → .....
7. unscathed (P 5)	g. the burning of a surface changing its color and texture	7. → .....
	h. disadvantageous and harmful	
	i. a sudden temporary outburst of energy from a small area of the sun's surface	

II. LANGUAGE (10 POINTS)

A/ Fill each of the numbered blanks in the following passage with one suitable word from the box. (5 points)

for – as – same – to – of – by – make – those – an – all – some – that – of – off – by – in – to – deal – as – with

Many people persuade themselves that they cannot understand mechanical things, or that they have no head for figures. These convictions _____ (1) them feel enclosed and safe, and _____ (2) course save them a great _____ (3) of trouble. But the reader who has a head for anything at _____ (4) is pretty sure to have a head for whatever he really wants to put his mind _____ (5). His interest, say _____ (6) mathematics, has usually been killed _____ (7) routine teaching, in exactly the _____ (8) way that the literary interest of most scientists, and for _____ (9) matter of most non-scientists, has been killed by the set book and the Shakespeare play. Few people would argue that _____ (10) whose taste _____ (11) poetry has not survived _____ (12) examination syllabus are fundamentally insensitive _____ (13) poetry. Yet they cheerfully write _____ (14) the large intellectual pleasures of science _____ (15) if they belonged only to minds _____ (16) a special cast. Science is not a special sense. It is as wide as the literal meaning _____ (17) its name: knowledge. The notion of the specialised mind is, _____ (18) comparison, _____ (19) modern as the notion of the specialised man, 'the scientist', a word which is only _____ (20) hundred years old.

B/ Finish each of the following sentences in such a way that it means exactly the same as the sentence printed before. (5 points)

a. If you want my advice, I would forget about buying a new laptop. **(1.5 points)**

If I _____

b. Immediately after his arrival, things went wrong. **(2 points)**

No sooner _____ than _____

c. Arthur said he was sorry he had hurt your feelings. **(1.5 points)**

Arthur apologized _____

III. WRITING (10 POINTS)

Like many science-fiction writers, scientists also believe that since there are other galaxies apart from our own there must be other life. That will not simply imply that our planet is going to be invaded by aliens but most radically by a revolutionary new form of transport and a planetary commercial development of space. In a coherent essay, say whether or not you share this vision of man's relation to the outer-space in the future by considering the huge sums of money currently spent worldwide on space exploration.

UNIVERSITE DE TUNIS
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Concours d'entrée à l'Ecole Normale Supérieure
Session 2010

Sections : Mathématiques-Physique et Physique-Chimie
Epreuve de Physique

Durée : 4 heures **Coefficient : 5**

IMPORTANT :
L'épreuve comporte cinq pages. Il sera largement tenu compte de la présentation, de la rédaction, et du soin apporté à la copie. Les copies doivent être numérotées. L'usage de la calculatrice est autorisé. Les documents ne sont pas autorisés.

PROBLEME I

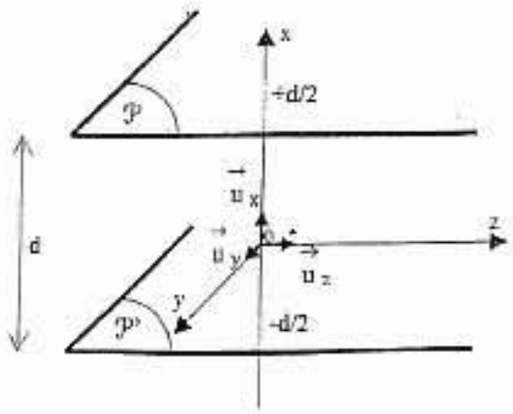
Données utiles :

- Le vide est caractérisé par sa permittivité électrique $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10^{-9}\ \mathrm{Fm^{-1}}$ $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ \mathrm{Hm^{-1}}$
- Pour un champ vectoriel $\vec{A}$, on rappelle que : $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A}$
- Une grandeur soulignée représente une fonction complexe dont la partie réelle est la grandeur physique associée.

Partie I

I-1. Qu'appelle-t-on conducteur parfait ? Quelles sont les valeurs des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ dans un tel conducteur ?
Que peut-on dire de la dissipation d'énergie dans un tel conducteur ?
I-2. On considère deux milieux voisins, séparés par une surface S, et ayant chacun la permittivité ε_0 et la perméabilité μ_0 du vide.
On désigne par $\vec{n}_{12}$ le vecteur unitaire normal à S en un point M_0, dirigé du milieu noté (1) vers le milieu noté (2), et par σ et $\vec{j}_s$ respectivement les densités surfaciques de charge et de courant au point M_0. Soient $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$ et $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$ les champs électriques et magnétiques dans les milieux (1) et (2) respectivement.
Ecrire les conditions aux limites sur ces champs au point M_0 de la surface S.
Que deviennent ces équations à l'interface vide (milieu (1)) – conducteur parfait (milieu (2)) ?

I-3. Donner les équations de Maxwell dans le vide dépourvu de charges et de courants et indiquer la signification physique de chacune d'elles.
I-4. En déduire les équations de propagation du champ électromagnétique dans le vide. Quelle est la vitesse c de propagation de la lumière dans le vide illimité ? Calculer sa valeur numérique.



Partie II

On considère deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ parfaitement conducteurs, distants de d , perpendiculaires à l'axe Ox et symétriques par rapport au plan (yOz) d'un repère orthonormé direct R(Oxyz) de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

On se propose d'étudier la propagation dans le vide qui règne entre ces deux plans, suivant la direction (Oz), d'une onde électromagnétique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k} = k_z \vec{u}_z$. Le champ électrique s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = f(x) e^{j(\omega t - k_z z)} \vec{u}_y$$

où j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

II-1. Etablir, à partir de l'équation de propagation du champ électrique $\underline{\vec{E}}$, l'équation différentielle vérifiée par la fonction $f(x)$.

II-2. Quelles sont les conditions que doit vérifier le champ $\underline{\vec{E}}$ sur les plans $\mathcal{P}$ (x = d/2) et $\mathcal{P}'$(x = - d/2). Montrer alors que la fonction $f(x)$ correspondant à l'onde qui se propage entre les deux plans, peut se mettre sous la forme : $f(x) = A_1 \cos(\alpha x) + A_2 \sin(\alpha x)$

Exprimer α en fonction de ω, k_g et c .

II-3. En utilisant les conditions que doit satisfaire le champ $\underline{\vec{E}}$ sur les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, montrer qu'on trouve plusieurs modes de propagation possibles dont chacun est caractérisé par un nombre entier n (que l'on supposera positif).

Préciser les solutions pour n pair et pour n impair et décrire le type d'onde auquel on aboutit.

II-4. Exprimer k_g en fonction de ω , c , n et d. Le milieu est-il dispersif ?

II-5. Monter que pour chaque mode de propagation possible entre les deux plans, la pulsation ω doit être supérieure à une valeur ω_{cn} que l'on exprimera en fonction de n, d et c. La pulsation ω_{cn} est appelée pulsation de coupure.

II-6. Représenter la variation de l'amplitude du champ électrique $\underline{\vec{E}}$ de l'onde pour les trois premiers modes : n = 1, 2 et 3. On prendra : $A_x = A_y = E_0$.

II-7. Déterminer, pour chaque mode la vitesse de phase V_φ et la vitesse de groupe V_g. En déduire la relation qui lie ces deux vitesses.

II-8. Comparer V_φ et V_g à la vitesse c de la lumière dans le vide. Commenter ces résultats.

III. Dans la suite du problème, on s'intéressera uniquement à l'étude du mode fondamental (n = 1) pour lequel le champ électrique s'écrit :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \vec{u}_y .$$

III-1. Déterminer le champ magnétique $\underline{\vec{B}}(M,t)$ associé à $\underline{\vec{E}}(M,t)$. Est-il transversal ?

III-2. Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{R}$. En déduire sa valeur moyenne $\langle \vec{R} \rangle$ dans le temps.

III-3. Vue la structure de l'onde, peut-on prévoir le sens de $\langle \vec{R} \rangle$?

III-4. Calculer la puissance moyenne P_m traversant une surface Σ perpendiculaire à l'axe (Oz), limitée par les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ et de longueur l dans la direction (Oy).

III-5. Calculer la densité volumique u de l'énergie électromagnétique.

III-6. En déduire sa valeur moyenne dans le temps que l'on écrira sous la forme :

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left[1 + \left(1 - \frac{\omega_{c1}^2}{\omega^2}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right)\right]$$

III-7. Calculer l'énergie électromagnétique δW_m contenue en moyenne dans une tranche du guide comprise entre z et z+dz et de section Σ (Σ est définie dans 2-*I*)

III-8. Sachant que l'énergie δW_m traverse $\Sigma(z+dz)$ pendant l'intervalle de temps dt, déterminer la vitesse $\vec{V}_e$ de propagation de l'énergie moyenne et la comparer à la vitesse de groupe V_g.

PROBLEME II

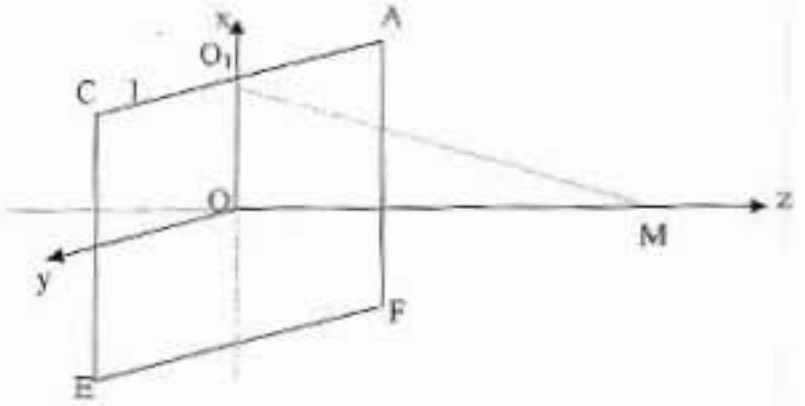
Partie I

I-1. Un segment conducteur AC de longueur 2a est parcouru, de A vers C, par un courant d'intensité I. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}_1(M)$ créé par ce segment en un point M de la médiatrice de AC et situé à une distance D du centre O_1 du segment AC, ($O_1M=D$).

I-2. On considère une spire conductrice carrée ACEF en assemblant quatre segments identiques à AC. Ce carré de centre O et d'axe Oz, est placé dans le plan xOy d'un trièdre orthonormé Oxyz, les côtés AC et EF sont parallèles à Oy. La spire est parcourue dans le sens ACEF, par un courant d'intensité I.

a- Donner l'expression des composantes du champ magnétique $\vec{B}_1(M)$ créé par le côté AC du carré au point M de l'axe 0z tel que OM = z.

b- Par des considérations de symétrie, déterminer la direction du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par la spire carrée au point M. Donner son expression.



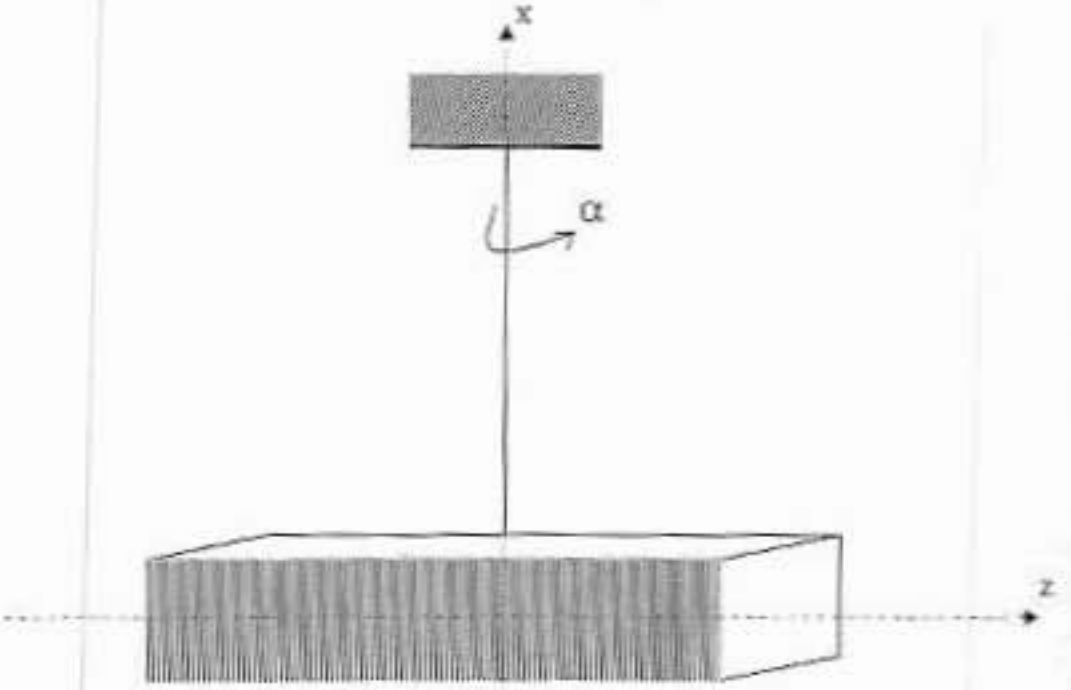
I-3. On considère un solénoïde de longueur indéfinie constitué de n spires jointives carrées (identiques à ACEF) par mètre d'axe z'z parcourues par un courant d'intensité I.

a- Donner l'allure des lignes de champ. Montrer que le solénoïde se comporte comme un barreau aimanté ayant un moment magnétique noté $\vec{M}$.

b- Déterminer le champ magnétique $\vec{B}_S(M)$ créé par ce solénoïde en un point M de son axe. On peut utiliser la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u^2+2b^2}\left(u^2+b^2\right)} = \frac{\pi}{2b^2}$$

I-4. Le solénoïde précédent est suspendu à l'aide d'un fil sans torsion parallèlement à l'axe Ox et accroché en son centre de façon à ce que son axe (Oz) soit horizontal dans une région de l'espace où règne un champ magnétique horizontal permanent $\vec{B}_0$



Quel est le mouvement du solénoïde ? quel sera sa position d'équilibre ? Justifier vos réponses.